АЛГЕБРА-1
Семестровое задание
0 вариант
(каждая задача оценивается по 4 балла)

Модуль 1. Первоначальные понятия теории множеств
и элементы комбинаторики.

№1. Найти $A \cap B,\ A \cup B,\ B\backslash A, A \times B,$ если:

$$A = \{1,3\}, \qquad B = \{1,2,3,4\}.$$

Ответ: $A \cap B = \{1,3\},\ A \cup B = \{1,2,3,4\},\ B\backslash A = \{2,4\},$

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$$

№2. Докажите тождество, проиллюстрируйте его с помощью диаграмм Эйлера-Венна: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

№3. Является ли отображение f сюръективным, инъективным, биективным:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ по правилу } f(x) = x^2 + 3x + 5,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: не сюръективно, не инъективно, не биективно.

№4. Даны подстановки a, b и c. Найти:

1) разложить a в произведение транспозиций, определить ее четность.

2) разложить b в произведение независимых циклов.

3) найти число $\sigma(c)$ инверсий в подстановке c и определить ее четность.

4) найти x, если $axb = c$.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 1) $a = (12)$ нечетная,

2) $b = (1356241)$,

3) $\sigma(c) = 9$ нечтная,

4) $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

№5. Выполните деление с остатком: 117 на –37.

Ответ: $117 = (-3) \cdot (-37) + 6$.

№6. Доказать, что разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8.

№7. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите НОД чисел a и b и его линейное представление. По формуле $[a, b] = \frac{ab}{(a,b)}$ найдите их НОК:

$$a = 51597, b = 46305.$$

Ответ: $1323 = 9 \cdot 51597 + (-10) \cdot 46305$, 1805895.

№8. Найдите остаток от деления 5^{18} на 17.

Ответ: 8.

№9. Представить комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме и найти:

$$1)\ z_1 \cdot z_2; \quad 2)\ \frac{z_1}{z_2}; \quad 3)\ {z_1}^{10}; \quad 4)\ \sqrt[3]{z_2}.$$

Ответ: 1) $z_1 \cdot z_2 = 4(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12})$.

2) $\frac{z_1}{z_2} = cos\frac{5\pi}{12} + isin\frac{5\pi}{12}$.

3) ${z_1}^{10} = 2^{10}(cos\frac{5\pi}{2} + isin\frac{5\pi}{2})$.

4) $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2}(cos\frac{\pi}{18} - isin\frac{\pi}{18})$, $\sqrt[3]{2}(cos\frac{11\pi}{18} + isin\frac{11\pi}{18})$, $\sqrt[3]{2}\left(cos\frac{23\pi}{18} + isin\frac{23\pi}{18}\right)$.

№10. Пусть $M = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ с бинарной операцией $\circ$, заданной по правилу: $a \circ b = \frac{ab}{3},\ \forall a, b \in M.$ Докажите, что $(M, \circ)$ − группа.

Ответ: $e = 3, a' = \frac{9}{a}$.

№11. Докажите, что множество $G = \{e, a, b\}$, где

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

является подгруппой симметрической группы S_3. Найдите порядок группы G и порядки всех ее элементов. *Указание. Составьте таблицу Кэли.*

Ответ:

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$$|G| = 3, |e| = 1, |a| = 3, |b| = 3.$$

№12. Докажите изоморфизм аддитивных групп $G_1 = \mathbb{Z}$ и $G_2 = 3\mathbb{Z}$.

№13. Докажите, что $\mathbb{Z}_5$ − ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Найдите обратимые элементы кольца и его характеристику.

Ответ: ${\mathbb{Z}_5}^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}, char\mathbb{Z}_5 = 5$.

№14. Является ли множество $P = \{1 + bi | b \in \mathbb{R}\}$ подполем поля комплексных чисел $\mathbb{C}$?

Ответ: нет.

АЛГЕБРА-1

Семестровое задание

№1. Найти $A \cap B,\ A \cup B,\ B \backslash A, A \times B,$ если:

1) $A = \{0, 5\},\ B = \{0,1,3,5\}.$
2) $A = \{1,2,3\},\ B = \{0,1,2,3\}.$
3) $A = \{-1,0\},\ B = \{-1,1,5\}.$
4) $A = \{2,4\},\ B = \{3,5,6\}.$
5) $A = \{1,3\},\ B = \{2,4,5\}.$
6) $A = \{-2,0,2\},\ B = \{1,2\}.$
7) $A = \{3,5,7\},\ B = \{11,13\}.$
8) $A = \{0,2,4\},\ B = \{2,4\}.$
9) $A = \{1,3,5\},\ B = \{3,5\}.$
10) $A = \{5,10\},\ B = \{5,10,15\}.$

№2. Докажите тождество, проиллюстрируйте его с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
2) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C}).$
3) $(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A.$
4) $A \cap B = A \cap (\bar{A} \cup B).$
5) $(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) = A.$
6) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$
7) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B.$
8) $B \cup (A \backslash B) = A \cup B.$
9) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C).$
10) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C).$

№3. Является ли отображение f сюръективным, инъективным, биективным:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу $f(x) = x^2 - x - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу $f(x) = x^7 + x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу $f(x) = 2x^5 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу $f(x) = x^3 + 3x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу $f(x) = x^2 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
6) $f: [0; +\infty] \to [0; +\infty]$ по правилу $f(x) = x^2,\ \forall x \in [0; +\infty]$.
7) $f: \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ по правилу $f(x) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
8) $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$по правилу $f(x) = sinx,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
9) $f: [0; \pi] \to [-1; 1]$ по правилу $f(x) = cosx,\ \forall x \in [0; \pi]$.
10) $f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ по правилу $f(x) = tgx,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

№4. Даны подстановки a, b и c. Найти:

а) разложить a в произведение транспозиций, определить ее четность.

б) разложить b в произведение независимых циклов.

в) найти число инверсий в подстановке c и определить ее четность.

г) найти x, если $axb = c$.

1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

5) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

9) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

10) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

№5. Выполните деление с остатком:

1) 134 на –35.
2) 89 на -14.
3) -117 на 81.
4) -128 на 37.
5) -215 на -23.
6) -97 на -13.
7) 157 на -18.
8) 271 на -26.
9) -314 на 29.
10) -340 на 67.

№6. Доказать, что:

1) $n(n+1) \vdots 2, \forall n \in \mathbb{N}$.
2) $n(n+1)(n+2) \vdots 3, \forall n \in \mathbb{N}$.
3) $n(n+1)(n+2) \vdots 6, \forall n \in \mathbb{N}$.
4) $n(n+1)(2n+1) \vdots 6, \forall n \in \mathbb{N}$.
5) $n(n^2+5) \vdots 6, \forall n \in \mathbb{N}$.
6) $n(n+1)(2n+1) \vdots 6, \forall n \in \mathbb{N}$.
7) $n^3 - n \vdots 3, \forall n \in \mathbb{Z}$.
8) $n^5 - n \vdots 5, \forall n \in \mathbb{Z}$.
9) $n^7 - n \vdots 7, \forall n \in \mathbb{Z}$.
10) $n^5 - n \vdots 30, \forall n \in \mathbb{Z}$.

№7. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите НОД чисел a и b и его линейное представление. По формуле $[a, b] = \frac{ab}{(a,b)}$ найдите их НОК:

1) $a = 546, b = 321.$
2) $a = 360, b = 504.$
3) $a = 187, b = 533.$
4) $a = 252, b = 468.$
5) $a = 279, b = 372.$
6) $a = 178, b = 381.$
7) $a = 318, b = 477.$
8) $a = 460, b = 630.$
9) $a = 663, b = 731.$
10) $a = 154, b = 452.$

№8. Найдите остаток от деления:

1) 8^{18} на $17.$
2) 5^{24} на $23.$
3) 2^{15} на $13.$
4) 3^{21} на $19.$
5) 4^{10} на $15.$
6) 6^{24} на $23.$
7) 7^{8} на 18.
8) 9^{23} на $23.$
9) 11^{5} на 8.
10) 13^{10} на 15.

№9. Представить комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме и найти: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) ${z_1}^n$; г) $\sqrt[m]{z_2}$.

1) $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, n = 2, m = 4$.
2) $z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i, n = 3, m = 2$.
3) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = \sqrt{3} - i, n = 2, m = 3$.
4) $z_1 = 2i, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, n = 4, m = 2$.
5) $z_1 = -2i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, n = 3, m = 2$.
6) $z_1 = 2, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, n = 3, m = 3$.
7) $z_1 = -2, z_2 = -\sqrt{3} - i, n = 2, m = 3$.
8) $z_1 = 1, z_2 = -1 - \sqrt{3}i, n = 4, m = 2$.
9) $z_1 = -1, z_2 = 1 - \sqrt{3}i, n = 3, m = 2$.
10) $z_1 = -i, z_2 = \sqrt{3} + i, n = 4, m = 3$.

№10. Докажите, что $(M, \circ)$ является группой, если:

1) $M = 4\mathbb{Z}, a \circ b = a + b, \forall a, b \in M$.
2) $M = 2\mathbb{Z}, a \circ b = a + b, \forall a, b \in M$.
3) $M = 3\mathbb{Z}, a \circ b = a + b, \forall a, b \in M$.
4) $M = \{2^x | x \in \mathbb{Z}\}, a \circ b = ab, \forall a, b \in M$.
5) $M = \{3^x | x \in \mathbb{Z}\}, a \circ b = ab, \forall a, b \in M$.
6) $M = \{5^x | x \in \mathbb{Z}\}, a \circ b = ab, \forall a, b \in M$.
7) $M = \mathbb{Q} \backslash \{0\}, a \circ b = ab, \forall a, b \in M$.
8) $M = \{x | x \in \mathbb{Q}, x > 0\}, a \circ b = ab, \forall a, b \in M$.
9) $M = \left\{\frac{x}{2} \middle| x \in \mathbb{Z}\right\}, a \circ b = a + b, \forall a, b \in M$.
10) $M = \left\{\frac{x}{15} \middle| x \in \mathbb{Z}\right\}, a \circ b = a + b, \forall a, b \in M$.

№11. Докажите, что множество G является подгруппой симметрической группы S_n. Найдите порядок группы G и порядки всех ее элементов. *Указание. Составьте таблицу Кэли.*

1) $G = \{e, a, b\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2) $G = \{e, a, b\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3) $G = \{e, a, b\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $G = \{e, a, b\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5) $G = \{e, a, b\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

6) $G = \{e, a, b, c\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7) $G = \{e, a, b, c\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8) $G = \{e, a, b, c\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9) $G = \{e, a, b, c\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

10) $G = \{e, a, b, c\}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

№12. Докажите изоморфизм групп:

1) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (M, \cdot)$, где $M = \{3^k |\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2) $G_1 = (2\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (M, \cdot)$, где $M = \{2^k |\ k \in \mathbb{Z}\}$.
3) $G_1 = (5\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (M, \cdot)$, где $M = \{5^k |\ k \in \mathbb{Z}\}$.
4) $G_1 = (2\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (6\mathbb{Z}, +)$.
5) $G_1 = (3\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (9\mathbb{Z}, +)$.
6) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (7\mathbb{Z}, +)$.
7) $G_1 = (4\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (M, \cdot)$, где $M = \{2^k |\ k \in \mathbb{Z}\}$.
8) $G_1 = (9\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (M, \cdot)$, где $M = \{3^k |\ k \in \mathbb{Z}\}$.
9) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (3\mathbb{Z}, +)$.
10) $G_1 = (5\mathbb{Z}, +)$ и $G_2 = (15\mathbb{Z}, +)$.

№13. Докажите, что $\mathbb{Z}_n -$ ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Найдите обратимые элементы кольца и его характеристику, если:

1) $n = 3$,
2) $n = 4$,
3) $n = 7$,
4) $n = 8$,
5) $n = 2$,
6) $n = 9$,
7) $n = 5$,
8) $n = 10$,
9) $n = 11$,
10) $n = 12$.

№14. Является ли множество P подполем поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, если:

1) $P = \{a + 0i | a \in \mathbb{R}\}$,
2) $P = \{0 + bi | b \in \mathbb{R}\}$,
3) $P = \{a + 2i | a \in \mathbb{R}\}$,
4) $P = \{3 + bi | b \in \mathbb{R}\}$,
5) $P = \{-1 + bi | b \in \mathbb{R}\}$,
6) $P = \{-2 + bi | b \in \mathbb{R}\}$,
7) $P = \{a + 3i | a \in \mathbb{R}\}$,
8) $P = \{a - 5i | a \in \mathbb{R}\}$,
9) $P = \{7 - bi | b \in \mathbb{R}\}$,
10) $P = \{a + i | a \in \mathbb{R}\}$.