**Домашнее задание №6.**

*Нулевой вариант контрольной работы №1*

**№1.** Доказать, что множество *G* ={*e*, *f*, *g*, *h*} является группой относительно операции умножения подстановок. Найти порядок группы, порядки всех ее элементов, подгруппы. Является ли группа абелевой, циклической?

$e=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4&\begin{matrix}5&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4&\begin{matrix}5&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$, $f=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4&\begin{matrix}5&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}6&4&\begin{matrix}2&5&\begin{matrix}3&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right),$

$g=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4&\begin{matrix}5&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}1&5&\begin{matrix}4&3&\begin{matrix}2&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$, $ h=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4&\begin{matrix}5&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}6&3&\begin{matrix}5&2&\begin{matrix}4&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$.

**Ответ:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *\** | *e* | *f* | *g* | *h* |
|  *e* | *e* | *f* | *g* | *h* |
| *f* | *f* | *g* | *h* | *e* |
| *g* | *g* | *h* | *e* | *f* |
| *h* | *h* | *e* | *f* | *g* |

|*G*| = 4, |*e*| = 1, |*f*| = 4, |*g*| = 2, |*h*| = 4. Подгруппы: *E*, {*e,g*}, *G*.

Группа абелева. Группа циклическая *G* = <*f*> = <*h*>.

**№2.** Пусть $G=\left〈g\right〉$ – циклическая группа порядка 20. Найти:

1) порядки всех элементов в G;

2) все подгруппы группы *G*;

3) разложение в правые и левые смежные классы группы *G* по всем ее собственным подгруппам.

**Ответ:**

1. G = {1, g, g2, g3, g4, g5, g6, g7, g8, g9, g10, g11, g12, g13, g14, g15, g16, g17, g18, g19}.

|1| = 1, |g| = 20, | g2|=10, | g3|=20, | g4|=5, | g5|=4, | g6|=10, | g7|=20, | g8|=5, | g9|=20, | g10|=2, |g11|=20, | g12|=5, | g13|=20, | g14|=10, | g15|=4, |g16|=5, | g17|=20, | g18|=10,

| g19|=20.

1. Подгруппы: *E* = <1>={1}, *H*1 = < g10>={1, g10},

*H*2 = < g5>=< g15>={1, g5, g10, g15},

*H*3 = <g4>=<g8>=<g12>=<g16>={1, g4, g8, g12, g16}, *H*4=<g2>=<g6>=<g14>=<g18>={1, g2, g4, g6, g8, g10, g12, g14, g16, g18}, *G*=<g>=<g3>=<g7>=<g9>=<g11>=<g13>=<g17>=< g19>

1. $G=H\_{1}\dot{∪}gH\_{1}\dot{∪}g^{2}H\_{1}\dot{∪}g^{3}H\_{1}\dot{∪}g^{4}H\_{1}\dot{∪}g^{5}H\_{1}\dot{∪}g^{6}H\_{1}\dot{∪}g^{7}H\_{1}\dot{∪}g^{8}H\_{1}\dot{∪}g^{9}H\_{1}$*,* |*G*:*H*1| = 10.

$G=H\_{2}\dot{∪}gH\_{2}\dot{∪}g^{2}H\_{2}\dot{∪}g^{3}H\_{2}\dot{∪}g^{4}H\_{2}$, |*G*:*H*2| = 5.

$G=H\_{3}\dot{∪}gH\_{3}\dot{∪}g^{2}H\_{3}\dot{∪}g^{3}H\_{3}$, |*G*:*H*3| = 4.

$G=H\_{4}\dot{∪}gH\_{4}$, |*G*:*H*4| = 2.

**№3.** Найдите порядок и индекс циклической группы, порожденной подстановкой

$π=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\4&1&\begin{matrix}2&3\end{matrix}\end{matrix}\right)$ в *S*4.

Будет ли эта циклическая подгруппа нормальной в *S*4?

**Ответ:**$ \left〈π\right〉$=$\left\{e=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\end{matrix}\right), π=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\4&1&\begin{matrix}2&3\end{matrix}\end{matrix}\right) ,π^{2}=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\3&4&\begin{matrix}1&2\end{matrix}\end{matrix}\right), π^{3}=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\2&3&\begin{matrix}4&1\end{matrix}\end{matrix}\right)\right\},$ $\left|\left〈π\right〉\right|=4,$ $\left|S\_{4}:\left〈π\right〉\right|=6.$

Так как $g=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\4&2&\begin{matrix}3&1\end{matrix}\end{matrix}\right)\in $ *S*4, $g^{-1}=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\4&2&\begin{matrix}3&1\end{matrix}\end{matrix}\right)\in $ *S*4, но

 $g^{-1}πg=\left(\begin{matrix}1&2&\begin{matrix}3&4\end{matrix}\\3&4&\begin{matrix}2&1\end{matrix}\end{matrix}\right)\notin \left〈π\right〉,$ то $\left〈π\right〉⋪S\_{4}$.

**№4.** Построить фактор-группу $4Z/16Z$. Составить таблицу сложения ее элементов.

**Ответ:**$ 4Z/16Z=\{0+16Z, 4+16Z, 8+16Z, 12+16Z\}$*.*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *+* | $$0+16Z$$ | $$4+16Z$$ | $$8+16Z$$ | $$12+16Z$$ |
| $$0+16Z$$ | $$0+16Z$$ | $$4+16Z$$ | $$8+16Z$$ | $$12+16Z$$ |
| $$4+16Z$$ | $$4+16Z$$ | $$8+16Z$$ | $$12+16Z$$ | $$0+16Z$$ |
| $$8+16Z$$ | $$8+16Z$$ | $$12+16Z$$ | $$0+16Z$$ | $$4+16Z$$ |
| $$12+16Z$$ | $$12+16Z$$ | $$0+16Z$$ | $$4+16Z$$ | $$8+16Z$$ |

**№5.** Найти все гомоморфизмы циклической группы $\left〈a\right〉$ порядка 12 в циклическую группу $\left〈b\right〉$ порядка 8. Указать ядро каждого гомоморфизма.

**Ответ:**

$φ\_{0}\left(a\right)=1$, $Kerφ\_{0}=\left〈a\right〉$,

$φ\_{1}\left(a\right)=b^{2}$, $Kerφ\_{1}=\left〈a^{4}\right〉$,

$φ\_{2}\left(a\right)=b^{4}$, $Kerφ\_{2}=\left〈a^{4}\right〉$,

$φ\_{3}\left(a\right)=b^{6}$, $Kerφ\_{3}=\left〈a^{4}\right〉$.